



· 形式概念分析中的概念约简 ·

基于不完备背景的3类 SE-ISI 概念约简

朱朵朵^{1,2},任睿思^{1,2},赵思雨^{1,2},魏玲^{1,2,3}

(1. 西北大学 数学学院,陕西 西安 710127;2. 西北大学 概念、认知与智能研究中心,陕西 西安 710127;
3. 闽南师范大学 数学与统计学院,福建 漳州 363000)

摘要 在不完备背景中,SE-ISI 概念具有丰富的不确定信息,然而不是所有 SE-ISI 概念都是必需的。该文研究不完备背景中不同情形下的 SE-ISI 概念约简获取理论与方法。首先,分别定义保持正信息、保持广义正信息与保持关系不变的 SE-ISI 概念约简,并分析3类 SE-ISI 概念约简间的关系;其次,引入 SE-ISI 代表概念矩阵,基于该矩阵给出3类 SE-ISI 概念约简的获取方法;最后,从 SE-ISI 代表概念矩阵角度讨论 SE-ISI 概念在3类 SE-ISI 概念约简下的特征与联系。

关键词 不完备背景;SE-ISI 概念约简;SE-ISI 代表概念矩阵;SE-ISI 概念特征
中图分类号:O29;TP18 **DOI**:10.16152/j.cnki.xdxbzr.2023-05-014

Three types of SE-ISI concept reduction based on incomplete contexts

ZHU Duoduo^{1,2}, REN Ruishi^{1,2}, ZHAO Siyu^{1,2}, WEI Ling^{1,2,3}

(1. School of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China;
2. Institute of Concepts, Cognition and Intelligence, Northwest University, Xi'an 710127, China;
3. School of Mathematics and Statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou 363000, China)

Abstract In incomplete contexts, SE-ISI concepts contain abundant uncertain information, but not all SE-ISI concepts are necessary. This paper studies the theories and methods of SE-ISI concept reduction under different situations in incomplete contexts. First, SE-ISI concept reductions preserving positive information, generalized positive information and relation are defined, respectively. Then, the relationships between the three types of SE-ISI concept reduction are analyzed. Moreover, by introducing the SE-ISI representative concept matrix, the methods of obtaining three types of SE-ISI concept reduction are given. Finally, the characteristics and relationships of SE-ISI concepts under three types of SE-ISI concept reduction are discussed from the perspective of SE-ISI representative concept matrix.

Keywords incomplete context; SE-ISI concept reduction; SE-ISI representative concept matrix; SE-ISI concept characteristics

收稿日期:2023-06-20

基金项目:国家自然科学基金(12171392, 62006190),西北大学研究生创新项目(CX2023065)

第一作者:朱朵朵,女,从事形式概念分析、粒计算、三支决策理论研究,duoduo_zl@163.com。

通信作者:魏玲,女,教授,博士生导师,从事形式概念分析、粒计算、三支决策理论等研究,wl@nwu.edu.cn。

形式概念分析(formal concept analysis, FCA)是德国数学家 Wille^[1]在 1982 年提出的以形式背景为基础进行数据分析和知识发现的有效数学工具。目前,该理论已在概念格的构造^[2-4]、属性约简^[5-7]、规则提取^[8]以及与其他理论的结合^[9-10]等方面取得诸多成果。

约简理论是形式概念分析的一个重要研究课题。属性约简用部分属性保持全部属性所具有的某种特性不变,从而消除冗余属性和数据,但这个过程中会损失原始信息。为避免原始信息的损失,2018 年,魏玲等受布尔因子分析中因子分解的启发,提出保持二元关系不变的概念约简^[11-12]。概念约简不仅完整保留了形式背景中的原始信息,而且减少了概念数量,降低了用形式概念分析解决问题的复杂性。近期,王霞等基于概念可辨识矩阵给出了概念约简方法^[13];谢小贤等借助矩阵运算给出了概念特征和生成概念约简的方法^[14];Zhao 等给出了一套基于代表概念矩阵获得概念协调集判定定理、概念约简及概念特征的理论方法^[15];马文胜等基于同效关系给出了概念约简和概念特征的获取方法^[16]。此外,智慧来等提出了形式背景下面向对象概念约简^[17];李俊余等研究了保持三元背景中所有三元关系不变的三元概念约简^[18]。

实际生活中,信息缺失无处不在,不完备背景^[19]的存在比形式背景更为普遍。针对不完备背景,Li 等定义了近似概念并构建了近似概念格^[20];Yao 基于区间集理论定义了 SE-ISI 概念、ISE-SI 概念和 ISE-ISI 概念 3 种部分已知概念^[21];Ren 等在 Yao 的研究基础上充分讨论了部分已知概念格的结构和关系^[22];Wang 等研究了不完备背景上 SE-ISI 概念格的属性约简^[23];Li 等将三支决策引入不完备背景,研究了基于三支近似概念格的属性约简^[10]。

不完备背景上有 SE-ISI 概念、ISE-SI 概念和 ISE-ISI 概念 3 种部分已知概念,本文探讨不完备背景的 SE-ISI 概念约简,其他两种部分已知概念约简问题可以进行类似的研究。

本文首先从确定拥有角度、可能拥有角度与所有原始背景信息角度,提出保持正信息、保持广义正信息与保持关系不变的 SE-ISI 概念约简;其次,给出这 3 类 SE-ISI 概念约简的求解方法;最后,讨论 SE-ISI 概念在每类 SE-ISI 概念约简下的特征与联系。

1 预备知识

定义 1^[19] 称四元组 $IK = (G, M, \{+, ?, -, \}, J)$ 为不完备形式背景。其中: $G = \{g_1, g_2, \dots, g_p\}$ 为对象集; $M = \{m_1, m_2, \dots, m_q\}$ 为属性集; J 为 G, M 及 $\{+, ?, -\}$ 之间的三元关系,即 $J \subseteq G \times M \times \{+, ?, -\}$ 。 $(g, m, +) \in J$ 表示对象 g 具有属性 m ; $(g, m, ?) \in J$ 表示不确定对象 g 是否具有属性 m ; $(g, m, -) \in J$ 表示对象 g 不具有属性 m 。

为简单起见,本文把不完备形式背景统称为不完备背景。

设 U 是有限集, $A \subseteq U, 2^U$ 为 U 的幂集,称 $[A, \bar{A}] = \{A \in 2^U \mid A \subseteq A \subseteq \bar{A}\}$ 为 U 上的一个区间集, A 和 $\bar{A}$ 分别称为区间集的下界和上界。 U 上的所有区间集记为 $I(2^U) = \{[A, \bar{A}] \mid A, \bar{A} \subseteq U, A \subseteq \bar{A}\}$ 。对任意的 $[B_1, C_1], [B_2, C_2] \in I(2^U)$,偏序关系定义为 $[B_1, C_1] \leq [B_2, C_2] \Leftrightarrow B_1 \subseteq B_2$ 且 $C_1 \subseteq C_2$;交($\cap$)、并($\cup$)、差($-$) 运算定义为

$$\begin{aligned} [B_1, C_1] \cap [B_2, C_2] &= [B_1 \cap B_2, C_1 \cap C_2], \\ [B_1, C_1] \cup [B_2, C_2] &= [B_1 \cup B_2, C_1 \cup C_2], \\ [B_1, C_1] - [B_2, C_2] &= [B_1 - B_2, C_1 - C_2]. \end{aligned}$$

不完备背景中的 $\underline{R}, \bar{R}$ 算子定义如下。

定义 2^[21] 设 $IK = (G, M, \{+, ?, -, \}, J)$ 为不完备背景, $X \subseteq G, B \subseteq M$ 。导出算子 $\underline{R}$ 和 $\bar{R}$ 定义为

$$\underline{R}(X) = \{m \in M \mid \forall x \in X, (x, m, +) \in J\}, \quad (1)$$

$$\bar{R}(X) = \{m \in M \mid \forall x \in X, (x, m, +) \in J \vee (x, m, ?) \in J\}; \quad (2)$$

$$\underline{R}(B) = \{g \in G \mid \forall b \in B, (g, b, +) \in J\}, \quad (3)$$

$$\bar{R}(B) = \{g \in G \mid \forall b \in B, (g, b, +) \in J \vee (g, b, ?) \in J\}. \quad (4)$$

结合算子 $\underline{R}$ 和 $\bar{R}$, Yao 定义了概念导出算子。

定义 3^[21] 设 $IK = (G, M, \{+, ?, -, \}, J)$ 为不完备背景, $X \in 2^G, [B, C] \in I(2^M)$ 。扩展导出算子 $\triangleleft: 2^G \rightarrow I(2^M), \triangleleft: I(2^M) \rightarrow 2^G$ 定义为

$$X^{\triangleleft} = [\underline{R}(X), \bar{R}(X)], \quad (5)$$

$$[B, C]^{\triangleleft} = \underline{R}(B) \cap \bar{R}(C). \quad (6)$$

利用扩展导出算子 $\triangleleft, \triangleleft$ 可生成 SE-ISI 概念。

定义 4^[21] 设 IK 为不完备背景,若一对对象

集与属性区间集 $(X,[B,C])$ 满足 $X^{\triangleleft}=[B,C]$,
 $[B,C]^{\triangleright}=X$,则称 $(X,[B,C])$ 是外延为经典集、
内涵为区间集的部分已知概念,简称为 SE-ISI 概
念。其中: X 称为 SE-ISI 概念的外延; $[B,C]$ 称为
其内涵。

记 IK 上所有 SE-ISI 概念形成的集合为 L , L
是一个完备格,称之为 SE-ISI 概念格。其中,对于
任意的 $(X,[B,C]),(Y,[D,E])\in L$,偏序关系
为 $(X,[B,C])\leqslant(Y,[D,E])\Leftrightarrow X\subseteq Y(\Leftrightarrow [D,E]\leqslant [B,C])$;下确界和上确界分别为 $(X,[B,C])\wedge (Y,[D,E])=(X\cap Y,([B,C]\cup [D,E])^{\triangleleft\triangleright}), (X,[B,C])\vee (Y,[D,E])=((X\cup Y)^{\triangleleft\triangleright},[B,C]\cap [D,E])$ 。

例1 表1为不完备背景 $IK=(G,M,\{+,-,?,\},J)$ 。其中:对象集 $G=\{1,2,3,4\}$;属性集 $M=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ 。若某对象具有某属性,则表
中对象所在行与属性所在列的交叉位置记为+;
若该对象不确定是否具有该属性,则相应位置记
为?;若该对象不具有该属性,则相应位置记为-。
IK 对应的 SE-ISI 概念格 L 如图1所示,其中, $c_i(i=1,2,\cdots,11)$ 是相应 SE-ISI 概念编号。

表1 不完备背景 IK

Tab.1 Incomplete context IK							
G	a	b	c	d	e	f	g
1	+	+	-	+	+	-	+
2	?	?	+	-	-	?	?
3	-	-	-	+	-	-	?
4	+	+	+	-	-	+	-

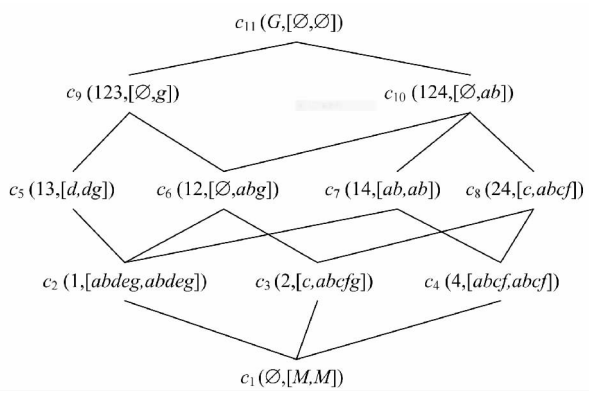


图1 SE-ISI 概念格 L

Fig.1 SE-ISI concept lattice L

2 3 类 SE-ISI 概念约简

本节在不完备背景上分别定义保持正信息、
广义正信息及关系不变的 SE-ISI 概念约简,并进
一步讨论3者之间的关系。

设 $IK=(G,M,\{+,-,?,\},J)$ 为不完备背景, L
为其 SE-ISI 概念格。根据 SE-ISI 概念的语义,用 J_L^+
表示 IK 上所有取值为 + 的对象-属性对构成的二元关
系,有 $J_L^+=\bigcup_{(X_i,[B_i,C_i])\in L}X_i\times B_i$;用 $J_L^{+?}$ 表示 IK 上所有
取值为 + 或 ? 的对象-属性对构成的二元关系,有 $J_L^{+?}=$
 $=\bigcup_{(X_i,[B_i,C_i])\in L}X_i\times C_i$;用 $J_L^?$ 表示 IK 上所有取值为 ? 的
对象-属性对构成的二元关系,有 $J_L^?=J_L^{+?}\setminus J_L^+$;用 J_L^-
表示 IK 上所有取值为 - 的对象-属性对构成的二
元关系,有 $J_L^-=G\times M\setminus J_L^{+?}=(J_L^{+?})^c$ 。

2.1 3 类 SE-ISI 概念约简的定义及存在性

首先给出保持正信息不变的 SE-ISI 概念约
简。

定义5 设 IK 为不完备背景, L 为其 SE-ISI
概念格, $F\subseteq L$ 。若 $J_L^+=J_F^+$,则称 F 为保持正信息
不变的 SE-ISI 概念协调集,其全体记为 CCS_+ ;进
一步,若对于任意的 $(X,[B,C])\in F$,有 $J_L^+\neq$
 $J_{F\setminus\{(X,[B,C])\}}^+$,则称 F 为保持正信息不变的 SE-ISI
概念约简,其全体记为 CR_+ 。

与定义5类似,还可定义以下两种 SE-ISI 概
念约简。

定义6 设 IK 为不完备背景, L 为其 SE-ISI
概念格, $F\subseteq L$ 。若 $J_L^{+?}=J_F^{+?}$,则称 F 为保持广义正
信息不变的 SE-ISI 概念协调集,其全体记为 $CCS_{+?}$;进
一步,若对任意 $(X,[B,C])\in F$,有 $J_L^{+?}\neq$
 $J_{F\setminus\{(X,[B,C])\}}^{+?}$,则称 F 为保持广义正信息不变的
SE-ISI 概念约简,其全体记为 $CR_{+?}$ 。

定义7 设 IK 为不完备背景, L 为其 SE-ISI
概念格, $F\subseteq L$ 。如果 $J_L^+=J_F^+, J_L^?=J_F^?$ 且 $J_L^-=J_F^-$,
则称 F 为保持关系不变的 SE-ISI 概念协调集,其
全体记为 CCS ;进一步,若对任意 $(X,[B,C])\in$
 F ,有 $J_{F\setminus\{(X,[B,C])\}}^+\neq J_L^+$,或 $J_{F\setminus\{(X,[B,C])\}}^?\neq J_L^?$,或
 $J_{F\setminus\{(X,[B,C])\}}^-\neq J_L^-$,则称 F 为保持关系不变的
SE-ISI 概念约简,其全体记为 CR 。

与前两种 SE-ISI 概念约简不同,保持关系不
变的 SE-ISI 概念约简可用部分 SE-ISI 概念来保留
不完备背景的全部信息。

不完备背景的关系取值只有 +、-、?,若保持

任意两种关系取值不变,则剩下一种也不变。后文通过保持取值为 + 和?的关系不变得到保持关系不变的 SE-ISI 概念约简。

定理 1 设 IK 为不完备背景,保持正信息不变的 SE-ISI 概念约简、保持广义正信息不变的 SE-ISI 概念约简以及保持关系不变的 SE-ISI 概念约简必存在。

证明 先证保持正信息不变的 SE-ISI 概念约简必存在。设 L 为 IK 的 SE-ISI 概念格,若对于任意 $(X,[B,C]) \in L$,有 $J_{L \setminus \{(X,[B,C])\}}^+ \neq J_L^+$,则 L 本身就是保持正信息不变的 SE-ISI 概念约简。若存在 $(X_0,[B_0,C_0]) \in L$,有 $J_L^+ = J_{L \setminus \{(X_0,[B_0,C_0])\}}^+$,则研究 $F = L \setminus \{(X_0,[B_0,C_0])\}$,对于任意的 $(X_1,[B_1,C_1]) \in F$,若 $J_L^+ \neq J_{F \setminus \{(X_1,[B_1,C_1])\}}^+$,则 F 为保持正信息不变的 SE-ISI 概念约简;否则,进一步研究 $F \setminus \{(X_1,[B_1,C_1])\}$ 。重复上述过程,因为 L 为有限集,所以,至少可以找到一个约简。故保持正信息不变的 SE-ISI 概念约简必存在。

类似地,可以证明保持广义正信息不变的 SE-ISI 概念约简和保持关系不变的 SE-ISI 概念约简必存在。

例 2 (续例 1) 根据定义 5、定义 6 及定义 7 可以验证 SE-ISI 概念集合 $F_1 = \{c_2, c_4, c_5, c_8\}$, $F_2 = \{c_2, c_5, c_6, c_8\}$, $F_3 = \{c_2, c_4, c_5, c_6, c_8\}$ 分别是保持正信息、保持广义正信息及保持关系不变的 SE-ISI 概念约简。以 F_1 为例,如果只需要例 1 不完备背景中确定拥有的信息,则不需要图 1 中所有 SE-ISI 概念,只需要 F_1 中的 4 个 SE-ISI 概念即可。

2.2 3 类 SE-ISI 概念约简之间的关系

根据 2.1 节给出的 3 类 SE-ISI 概念约简定义,本小节研究 3 类 SE-ISI 概念约简之间的关系。

定理 2 设 IK 为不完备背景, L 为其 SE-ISI 概念格,有 $CCS = CCS_+ \cap CCS_{+?}$ 。

证明 首先证明 $CCS \subseteq CCS_+ \cap CCS_{+?}$ 。对于任意 $F \in CCS$, $J_L^+ = J_F^+$ 且 $J_L^? = J_F^?$,又 $J_L^{+?} = J_L^+ \cup J_L^? = J_F^+ \cup J_F^? = J_F^{+?}$,由定义 5 和定义 6 可得 $F \in CCS_+ \cap CCS_{+?}$,故 $CCS \subseteq CCS_+ \cap CCS_{+?}$ 。下证 $CCS_+ \cap CCS_{+?} \subseteq CCS$ 。对任意 $F \in CCS_+ \cap CCS_{+?}$, $J_L^+ = J_F^+$ 且 $J_L^{+?} = J_F^{+?}$,因为 $J_L^? = J_L^{+?} \setminus J_L^+$, $J_F^? = J_F^{+?} \setminus J_F^+$,所以 $J_L^? = J_F^?$,进而根据定义 7 可得 $F \in CCS$ 。因此, $CCS_+ \cap CCS_{+?} \subseteq CCS$ 。综上, $CCS = CCS_+ \cap CCS_{+?}$ 。

定理 2 表明保持关系不变的 SE-ISI 概念协调

集一定是保持正信息和保持广义正信息不变的 SE-ISI 概念协调集。反之,如果一个集合同时是保持正信息和保持广义正信息不变的 SE-ISI 概念协调集,则其一定是保持关系不变的 SE-ISI 概念协调集。

推论 1 设 IK 为不完备背景,有 $CR \subseteq CCS_+$, $CR \subseteq CCS_{+?}$ 。

证明 因为 $CR \subseteq CCS$,所以根据定理 2 可得: $CR \subseteq CCS_+$, $CR \subseteq CCS_{+?}$ 。

根据推论 1,保持关系不变的 SE-ISI 概念约简一定是保持正信息和保持广义正信息不变的 SE-ISI 概念协调集。

定理 3 设 IK 为不完备背景, L 为其 SE-ISI 概念格,有 $CR_+ \cap CR_{+?} \subseteq CR$ 。

证明 对任意 $F \in CR_+ \cap CR_{+?}$,由 $CR_+ \subseteq CCS_+$, $CR_{+?} \subseteq CCS_{+?}$,有 $F \in CCS_+ \cap CCS_{+?}$,根据定理 2 知: $F \in CCS$ 。又因为 $F \in CR_+ \cap CR_{+?}$,所以对任意 $(X,[B,C]) \in F$, $J_L^+ \neq J_{F \setminus \{(X,[B,C])\}}^+$ 且 $J_L^{+?} \neq J_{F \setminus \{(X,[B,C])\}}^{+?}$,进而根据定义 7 有 $F \in CR$ 。故 $CR_+ \cap CR_{+?} \subseteq CR$ 。

由定理 3 可知,如果一个集合同时是保持正信息和保持广义正信息不变的 SE-ISI 概念约简,则其一定是保持关系不变的 SE-ISI 概念约简。

基于上述分析,3 类 SE-ISI 概念约简之间的关系如图 2 所示。其中, $\wedge$ 表示合取。

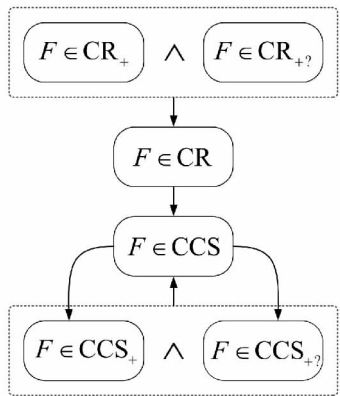


图 2 3 类 SE-ISI 概念约简的关系
Fig. 2 Relationships among three types of SE-ISI concept reducts

3 3 类 SE-ISI 概念约简的获取方法

本节给出 3 类 SE-ISI 概念约简的代表概念矩阵和协调集判定定理,并在此基础上给出 3 类

SE-ISI 概念约简的计算方法。

首先定义3类 SE-ISI 代表概念矩阵。

定义8 设 $IK = (G, M, \{+, ?, -\}, J)$ 为不完备背景, L 为其 SE-ISI 概念格, $g \in G, m \in M, (X, [B, C]) \in L$ 。

1) 如果 $(g, m) \in X \times B$, 则称 $(X, [B, C])$ 是 (g, m) 关于 SE-ISI 概念的正信息代表概念, 简称正信息 SE-ISI 代表概念, 其全体记为 $REP_+((g, m))$ 。

2) 如果 $(g, m) \in X \times C$, 则称 $(X, [B, C])$ 是 (g, m) 关于 SE-ISI 概念的广义正信息代表概念, 简称广义正信息 SE-ISI 代表概念, 其全体记为 $REP_{+?}((g, m))$ 。

3) 称 $REP((g, m)) = \begin{cases} REP_+((g, m)) \cap REP_{+?}((g, m)), (g, m) \in X \times B \\ REP_{+?}((g, m)), (g, m) \in X \times C \text{ 且 } (g, m) \notin X \times B \end{cases}$ 是 (g, m) 关于 SE-ISI 概念的关系代表概念集, 简称关系 SE-ISI 代表概念集。

在此基础上, 称 $A_+ = (REP_+((g, m)))$, $A_{+?} = (REP_{+?}((g, m)))$, $A = (REP((g, m)))$ 分别为 IK 的正信息 SE-ISI 代表概念矩阵、广义正信息 SE-ISI 代表概念矩阵及关系 SE-ISI 代表概念矩阵。

3类 SE-ISI 代表概念矩阵的相关性质如下。

性质1 设 $IK = (G, M, \{+, ?, -\}, J)$ 为不完备背景, $g \in G, m \in M$ 。 $A = (REP((g, m)))$, $A_+ = (REP_+((g, m)))$ 与 $A_{+?} = (REP_{+?}((g, m)))$ 分别为其关系 SE-ISI 代表概念矩阵、正信息 SE-ISI 代表概念矩阵和广义正信息 SE-ISI 代表概念矩阵。下列结论成立:

- 1) $REP_+((g, m)) \neq \emptyset \Leftrightarrow (g, m) \in J_L^+$;
- 2) $REP_{+?}((g, m)) \neq \emptyset \Leftrightarrow REP((g, m)) \neq \emptyset \Leftrightarrow (g, m) \in J_L^{+?}$;
- 3) $REP_+((g, m)) \subseteq REP_{+?}((g, m))$ 。

证明 根据定义8, 结论1) 和结论2) 显然成立。

结论3) 对任意 $(X, [B, C]) \in REP_+((g, m))$, $(g, m) \in X \times B$, 又 $X \times B \subseteq X \times C$, 所以 $(g, m) \in X \times C$ 。由定义8知 $(X, [B, C]) \in REP_{+?}((g, m))$, 故 $REP_+((g, m)) \subseteq REP_{+?}((g, m))$ 。

事实上, 要得到保持正信息不变的 SE-ISI 概念协调集, 只需要找出与所有非空 $REP_+((g, m))$ 相交非空的 SE-ISI 概念集即可。保持广义正信息和保持关系不变的 SE-ISI 概念协调集也是类

似的。即定理4所述。

定理4 设 IK 为不完备背景, L 为其 SE-ISI 概念格, $F \subseteq L$ 。下列结论成立:

- 1) $F \in CCS_+ \Leftrightarrow \forall REP_+((g, m)) \neq \emptyset, F \cap REP_+((g, m)) \neq \emptyset$;
- 2) $F \in CCS_{+?} \Leftrightarrow \forall REP_{+?}((g, m)) \neq \emptyset, F \cap REP_{+?}((g, m)) \neq \emptyset$;
- 3) $F \in CCS \Leftrightarrow \forall REP((g, m)) \neq \emptyset, F \cap REP((g, m)) \neq \emptyset$ 。

证明 1) 必要性。由 $F \in CCS_+$ 知 $J_L^+ = J_F^+$ 。根据性质1知 $REP_+((g, m)) \neq \emptyset \Leftrightarrow (g, m) \in J_L^+$, 故有 $(g, m) \in J_F^+$, 即存在 $(X, [B, C]) \in F$ 满足 $(g, m) \in X \times B$ 。由定义8知, $(X, [B, C]) \in REP_+((g, m))$ 。因此, $F \cap REP_+((g, m)) \neq \emptyset$ 。

充分性。由性质1知, $REP_+((g, m)) \neq \emptyset \Leftrightarrow (g, m) \in J_L^+$ 。对任意 $(g, m) \in J_L^+$, 由 $F \cap REP_+((g, m)) \neq \emptyset$ 知, 存在 $(X, [B, C]) \in F$, 使 $(X, [B, C]) \in REP_+((g, m))$ 且 $(g, m) \in X \times B$, 故 $J_L^+ = \bigcup_{\substack{(g, m) \in X \times B \\ (X, [B, C]) \in F}} \{(g, m)\} = \bigcup_{(X, [B, C]) \in F} X \times B = J_F^+$, 即 $F \in CCS_+$ 。

2) 类似于结论1) 的证明, 可得结论2) 成立。

3) 必要性。 $F \in CCS$, 由定理2得 $F \in CCS_+$ 且 $F \in CCS_{+?}$ 。若 $F \in CCS_+$, 则由结论1) 知, 对任意 $REP_+((g, m)) \neq \emptyset$, 即对任意 $(g, m) \in J_L^+$, 有 $F \cap REP_+((g, m)) \neq \emptyset$; 若 $F \in CCS_{+?}$, 由结论2) 知, 对任意 $REP_{+?}((g, m)) \neq \emptyset$, 即对任意 $(g, m) \in J_L^{+?}$, 有 $F \cap REP_{+?}((g, m)) \neq \emptyset$ 。根据定义8, 对任意 $(g, m) \in J_L^{+?}$, $F \cap REP((g, m)) \neq \emptyset$, 进而由性质1, 对任意 $REP((g, m)) \neq \emptyset$, $F \cap REP((g, m)) \neq \emptyset$ 。

充分性。由性质1知, $REP((g, m)) \neq \emptyset \Leftrightarrow (g, m) \in J_L^{+?}$ 。若 $(g, m) \in J_L^+$, 则 $REP_+((g, m)) \neq \emptyset$ 且 $REP_{+?}((g, m)) \neq \emptyset$; 若 $(g, m) \in J_L^{+?}$, 则 $REP_{+?}((g, m)) \neq \emptyset$ 。对任意 $REP((g, m)) \neq \emptyset$, $F \cap REP((g, m)) \neq \emptyset$, 根据定义8和性质1可得, 对任意 $REP_+((g, m)) \neq \emptyset$, $F \cap REP_+((g, m)) \neq \emptyset$; 对任意 $REP_{+?}((g, m)) \neq \emptyset$, $F \cap REP_{+?}((g, m)) \neq \emptyset$ 。根据结论1) 和结论2) 有 $F \in CCS_+$ 且 $F \in CCS_{+?}$ 。由定理2得 $F \in CCS$ 。

由定理4 和性质1 可得保持正信息不变的 SE-ISI 概念约简判定定理。

定理 5 设 IK 为不完备背景, L 为其 SE-ISI 概念格。对任意 $F \subseteq L$, 若满足以下条件:

- 1) 对任意 $(g, m) \in J_L^+, F \cap \text{REP}_+((g, m)) \neq \emptyset$;
- 2) 对任意 $(X, [B, C]) \in F$, 存在 $(g_0, m_0) \in J_L^+$, 使得 $(F \setminus \{(X, [B, C])\}) \cap \text{REP}_+((g_0, m_0)) \neq \emptyset$ 。

则 F 是保持正信息不变的 SE-ISI 概念约简。

保持广义正信息和保持关系不变的 SE-ISI 概念约简判定定理也可类似得到。

基于 SE-ISI 代表概念矩阵可给出 SE-ISI 概念约简的计算方法。

定义 9 设 IK 为不完备背景, L 为其 SE-ISI 概念格。正信息 SE-ISI 代表概念函数定义为

$$\varphi(\mathbf{A}_+) = \bigwedge_{\text{REP}_+((g, m)) \in \mathbf{A}_+} (\bigvee_{(X, [B, C]) \in \text{REP}_+((g, m))} (X, [B, C]))。$$

根据吸收律与分配律, $\varphi(\mathbf{A}_+)$ 对应的最小析取范式的所有合取式为 IK 的所有保持正信息不变的 SE-ISI 概念约简。但通过 $\varphi(\mathbf{A}_+)$ 计算时存在冗余的信息, 因此记包含关系下所有极小 $\text{REP}_+((g, m))$ 组成的矩阵为最小正信息 SE-ISI 代表概念矩阵 $\mathbf{A}_{\min_+}$, $\varphi(\mathbf{A}_{\min_+})$ 对应的最小析取范式的所有合取式能更简单得到所有保持正信息不变的 SE-ISI 概念约简。类似可得 $\varphi(\mathbf{A}_{\min_+?}), \varphi(\mathbf{A}_{\min})$ 。

例 3 (续例 1) 根据定义 8, 可得 $\text{REP}_+((1, a)) = \{(1, [abdeg, abdeg]), (14, [ab, ab])\} = \{c_2, c_7\}$ 。类似地, 可得到所有 $\text{REP}_+((g, m))$ 。因此, 正信息 SE-ISI 代表概念矩阵为

$$\mathbf{A}_+ = \begin{pmatrix} \{c_2, c_7\} & \{c_2, c_7\} & \emptyset & \{c_2, c_5\} & \{c_2\} & \emptyset & \{c_2\} \\ \emptyset & \emptyset & \{c_3, c_8\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{c_5\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \{c_4, c_7\} & \{c_4, c_7\} & \{c_4, c_8\} & \emptyset & \emptyset & \{c_4\} & \emptyset \end{pmatrix}$$

最小正信息 SE-ISI 代表概念矩阵为

$$\mathbf{A}_{\min_+} = \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{c_2\} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \{c_3, c_8\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{c_5\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{c_4\} & \emptyset \end{pmatrix},$$

进而正信息 SE-ISI 代表概念函数为 $\varphi(\mathbf{A}_{\min_+}) = (c_2 \wedge c_5 \wedge c_4 \wedge c_3) \vee (c_2 \wedge c_5 \wedge c_4 \wedge c_8)$ 。即 $\text{CR}_+ = \{\{c_2, c_3, c_4, c_5\}, \{c_2, c_4, c_5, c_8\}\}$ 。类似地, 可得 $\text{CR}_{+?} = \{\{c_2, c_3, c_4, c_5\}, \{c_2, c_3, c_5, c_8\}, \{c_2, c_5, c_6, c_8\}, \{c_2, c_5, c_8, c_9\}\}$; $\text{CR} = \{\{c_2, c_3, c_4, c_5\},$

$$\{c_2, c_4, c_5, c_6, c_8\}, \{c_2, c_4, c_5, c_8, c_9\}\}。$$

4 SE-ISI 概念特征分析

本节根据 SE-ISI 概念在每种 SE-ISI 概念约简的作用将其分为 3 类, 并研究其特征。

记 Δ 取“+”“+?”“R”分别表示保持正信息、保持广义正信息、保持关系不变这 3 类不同 SE-ISI 概念约简含义。

定义 10 设 IK 为不完备背景, L 为其 SE-ISI 概念格, $\{F_{\Delta i} \mid i \in \tau, \tau \text{ 为指标集}\}$ 为某类 SE-ISI 概念约简的集合。 L 可分为 3 类:

- 1) 核心 SE-ISI 概念集 $C_{\Delta} = \bigcap_{i \in \tau} F_{\Delta i}$;
- 2) 相对必要 SE-ISI 概念集 $K_{\Delta} = \bigcup_{i \in \tau} F_{\Delta i} \setminus \bigcap_{i \in \tau} F_{\Delta i}$;
- 3) 绝对不必要 SE-ISI 概念集 $U_{\Delta} = L \setminus \bigcup_{i \in \tau} F_{\Delta i}$ 。
- 式中, $\Delta \in \{+, +?, R\}$ 。

例 4 表 2 为不完备背景 $(U, A, \{+, ?, -, \}, S)$, 其 SE-ISI 概念格如图 3 所示。其中, $c_i (i = 1, 2, \dots, 10)$ 是相应 SE-ISI 概念编号。将所有 SE-ISI 概念根据定义 10 分类, 其结果如表 3 所示。

表 2 不完备背景 $(U, A, \{+, ?, -, \}, S)$
Tab. 2 Incomplete context $(U, A, \{+, ?, -, \}, S)$

G	a	b	c	d
1	+	-	?	+
2	-	+	-	?
3	+	-	+	-
4	+	+	-	-

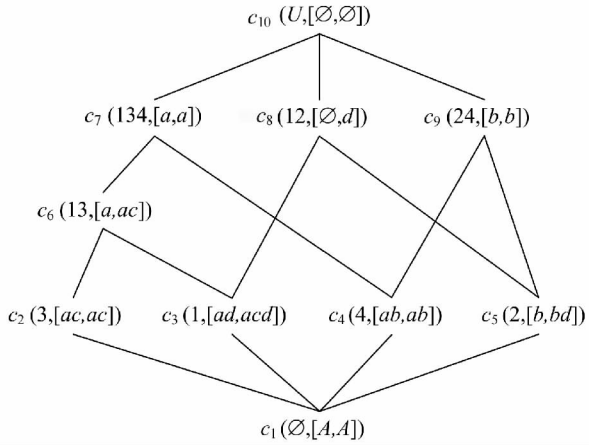


图 3 SE-ISI 概念格
Fig. 3 SE-ISI concept lattice

表 3 SE-ISI 概念分类
Tab. 3 Classifications of SE-ISI concepts

Δ	C_Δ	K_Δ	U_Δ
+	$\{c_2, c_3\}$	$\{c_4, c_5, c_7, c_9\}$	$\{c_1, c_6, c_8, c_{10}\}$
+?	$\emptyset$	$\{c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9\}$	$\{c_1, c_{10}\}$
R	$\{c_2, c_3\}$	$\{c_4, c_5, c_7, c_8, c_9\}$	$\{c_1, c_6, c_{10}\}$

从 SE-ISI 代表概念矩阵角度来说,SE-ISI 概念在每类 SE-ISI 概念约简下的特征类似,故本文只给出保持正信息不变的 SE-ISI 概念约简下的 3 类 SE-ISI 概念判定定理。

定理 6 设 IK 为不完备背景, L 为其 SE-ISI 概念格, $c_0 \in L$ 。下列结论成立:

1) $c_0 \in C_+ \Leftrightarrow$ 存在 $(g_0, m_0) \in J_L^+$, 使得 $\text{REP}_+((g_0, m_0)) = \{c_0\}$;

2) $c_0 \in U_+ \Leftrightarrow$ 对任意 $\text{REP}_+((g, m)) \in \mathbf{A}_{\min_+}$, 有 $c_0 \notin \text{REP}_+((g, m))$;

3) $c_0 \in K_+ \Leftrightarrow$ 对于任意 $(g, m) \in J_L^+$, $\text{REP}_+((g, m)) \neq \{c_0\}$, 且存在 $\text{REP}_+((g_0, m_0)) \in \mathbf{A}_{\min_+}$, 使得 $c_0 \in \text{REP}_+((g_0, m_0))$ 。

证明 1) $c_0 \in C_+ \Leftrightarrow L \setminus \{c_0\} \notin \text{CCS}_+ \Leftrightarrow$ 存在 $\text{REP}_+((g_0, m_0)) \neq \emptyset$, 使 $\text{REP}_+((g_0, m_0)) \cap (L \setminus \{c_0\}) = \emptyset \Leftrightarrow \text{REP}_+((g_0, m_0)) = \{c_0\}$, 即存在 $(g_0, m_0) \in J_L^+$, 使 $\text{REP}_+((g_0, m_0)) = \{c_0\}$ 。

2) 必要性。假设存在 $\text{REP}_+((g_0, m_0)) \in \mathbf{A}_{\min_+}$, 使 $c_0 \in \text{REP}_+((g_0, m_0))$, 由定理 4 知, 存在 $F_0 \in \text{CR}_+$, 使 $c_0 \in F_0$, 即 $c_0 \notin U_+$, 矛盾。故对于任意的 $\text{REP}_+((g, m)) \in \mathbf{A}_{\min_+}$, 有 $c_0 \notin \text{REP}_+((g, m))$ 。

充分性。假设 $c_0 \notin U_+$, 则存在 $F_0 \in \text{CR}_+$, 使 $c_0 \in F_0$, 即存在 $\text{REP}_+((g_0, m_0)) \in \mathbf{A}_{\min_+}$, 使 $c_0 \in \text{REP}_+((g_0, m_0))$, 矛盾。故 $c_0 \in U_+$ 。

3) 由结论 1) 与结论 2) 直接可得。

定理 7 给出 3 类 SE-ISI 概念约简下核心 SE-ISI 概念集之间的关系。

定理 7 设 IK 为不完备背景, L 为其 SE-ISI 概念格, 有 $C_+ \cup C_{+?} = C_R$ 。

证明 首先, 证明 $C_+ \cup C_{+?} \subseteq C_R$ 。对任意 $c_0 \in C_+ \cup C_{+?}$, $c_0 \in C_+$ 或 $c_0 \in C_{+?}$ 。若 $c_0 \in C_+$, 则存在 $(g_0, m_0) \in J_L^+$, 使得 $\text{REP}_+((g_0, m_0)) = \{c_0\}$ 。由定义 8 与性质 1 知, $\text{REP}((g_0, m_0)) = \text{REP}_+$

$((g_0, m_0)) \cap \text{REP}_{+?}((g_0, m_0)) = \{c_0\}$, 故 $c_0 \in C_R$ 。若 $c_0 \in C_{+?}$, 则存在 $(g_1, m_1) \in J_L^{+?}$, 使得 $\text{REP}_{+?}((g_1, m_1)) = \{c_0\}$ 。若 $(g_1, m_1) \in J_L^+$, 则 $c_0 \in \text{REP}_+((g_1, m_1))$, 由定义 8 得, $\text{REP}((g_1, m_1)) = \{c_0\}$; 若 $(g_1, m_1) \in J_L^?$, 由定义 8 知, $\text{REP}((g_1, m_1)) = \text{REP}_{+?}((g_1, m_1)) = \{c_0\}$, 因此, $c_0 \in C_R$ 。故 $C_+ \cup C_{+?} \subseteq C_R$ 。

其次, 证明 $C_R \subseteq C_+ \cup C_{+?}$ 。对任意 $c_0 \in C_R$, 存在 $(g_2, m_2) \in J_L^{+?}$, 使 $\text{REP}((g_2, m_2)) = \{c_0\}$ 。若 $(g_2, m_2) \in J_L^+$, 根据性质 1 和定义 8 有, $\text{REP}((g_2, m_2)) = \text{REP}_+((g_2, m_2)) \cap \text{REP}_{+?}((g_2, m_2)) = \text{REP}_+((g_2, m_2))$ 。因此, $\text{REP}_+((g_2, m_2)) = \{c_0\}$, 由定理 6 得 $c_0 \in C_+$ 。若 $(g_2, m_2) \in J_L^?$, 根据定义 8 有, $\text{REP}((g_2, m_2)) = \text{REP}_{+?}((g_2, m_2))$, $\text{REP}_{+?}((g_2, m_2)) = \{c_0\}$, 所以 $c_0 \in C_{+?}$ 。故 $C_R \subseteq C_+ \cup C_{+?}$ 。

综上, $C_+ \cup C_{+?} = C_R$ 。

3 类 SE-ISI 概念约简下不必要 SE-ISI 概念集的关系, 如定理 8 所述。

定理 8 设 IK 为不完备背景, L 为其 SE-ISI 概念格, 有 $U_+ \cap U_{+?} \subseteq U_R$ 。

证明 对任意 $c_0 \in U_+ \cap U_{+?}$, 假设 $c_0 \notin U_R$, 即存在 $F_0 \in \text{CR}$, 使 $c_0 \in F_0$ 。那么, 存在 $(g_0, m_0) \in J_L^{+?}$, 使 $c_0 \in \text{REP}((g_0, m_0)) \in \mathbf{A}_{\min}$ 。即 $c_0 \in \text{REP}((g_0, m_0))$ 且对于任意 $(g, m) \in J_L^{+?}$, $\text{REP}((g, m)) \not\subseteq \text{REP}((g_0, m_0))$ 。

若 $(g_0, m_0) \in J_L^+$, 由定义 8 和性质 1 得, $\text{REP}((g_0, m_0)) = \text{REP}_+((g_0, m_0))$ 。下证 $\text{REP}_+((g_0, m_0)) \in \mathbf{A}_{\min_+}$ 。假设 $\text{REP}_+((g_0, m_0)) \notin \mathbf{A}_{\min_+}$, 即存在 $(g_1, m_1) \in J_L^+$, 使 $\text{REP}_+((g_1, m_1)) \subset \text{REP}_+((g_0, m_0))$ 。根据定义 8 与性质 1 有, $\text{REP}((g_1, m_1)) = \text{REP}_+((g_1, m_1)) \subset \text{REP}((g_0, m_0))$, 与 $\text{REP}((g_0, m_0)) \in \mathbf{A}_{\min}$ 矛盾。故 $c_0 \in \text{REP}_+((g_0, m_0)) \in \mathbf{A}_{\min_+}$, 与 $c_0 \in U_+$ 矛盾。因此, $c_0 \in U_R$ 。

若 $(g_0, m_0) \in J_L^?$, 由定义 8 得, $\text{REP}((g_0, m_0)) = \text{REP}_{+?}((g_0, m_0))$ 。下证 $\text{REP}_{+?}((g_0, m_0)) \in \mathbf{A}_{\min_{+?}}$ 。假设 $\text{REP}_{+?}((g_0, m_0)) \notin \mathbf{A}_{\min_{+?}}$, 即存在 $(g_2, m_2) \in J_L^{+?}$, 使 $\text{REP}_{+?}((g_2, m_2)) \subset \text{REP}_{+?}((g_0, m_0))$ 。若 $(g_2, m_2) \in J_L^+$, 则 $\text{REP}_+((g_2, m_2)) \neq \emptyset$, $\text{REP}((g_2, m_2)) = \text{REP}_+((g_2, m_2)) \subseteq \text{REP}_{+?}((g_2, m_2)) \subset \text{REP}((g_0, m_0))$, 与 $\text{REP}((g_0, m_0)) \in \mathbf{A}_{\min}$ 矛盾; 若 $(g_2, m_2) \in J_L^?$, 则 $\text{REP}((g_2, m_2)) = \text{REP}_{+?}((g_2, m_2)) \subset \text{REP}((g_0, m_0))$, 与 $\text{REP}((g_0, m_0)) \in \mathbf{A}_{\min}$ 矛盾。因此, $c_0 \in \text{REP}_{+?}((g_0, m_0)) \in$

$A_{\min+?}$, 与 $c_0 \in U_{+?}$ 矛盾。故 $c_0 \in U_R$ 。

综上, $c_0 \in U_R$, 故 $U_{+} \cap U_{+?} \subseteq U_R$ 。

例 5 (续例 4) 由表 3 可知, $C_{+} = \{c_2, c_3\}$, $C_{+?} = \emptyset$, $C_R = \{c_2, c_3\}$, $U_{+} \cap U_{+?} = \{c_1, c_{10}\}$, $U_R = \{c_1, c_6, c_{10}\}$ 。显然, $C_{+} \cup C_{+?} = C_R$, $U_{+} \cap U_{+?} \subseteq U_R$, 即满足定理 7 和定理 8。但 $c_6 \in U_R$, $c_6 \notin U_{+} \cap U_{+?}$, 即 $U_R \subseteq U_{+} \cap U_{+?}$ 不一定成立。

5 结语

本文针对不完备背景, 提出了 3 类 SE-ISI 概念约简, 研究了它们之间的关系, 并基于 SE-ISI 代表概念矩阵给出了 SE-ISI 概念约简与 SE-ISI 概念特征的获取方法。不同的 SE-ISI 概念约简保留不完备背景的信息不同, 根据所需信息选取 SE-ISI 概念约简后, 可以减少 SE-ISI 概念的数量, 在一定程度上可以降低用 SE-ISI 概念进行知识挖掘的复杂度。

事实上, 每类 SE-ISI 概念约简数量并不唯一, 那么对于每类 SE-ISI 概念约简, 约简集间存在怎样的关系, 以及如何通过评价指标衡量约简的优劣, 将是进一步要研究的工作。

参考文献

- [1] WILLE R. Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts [C]// Ordered Sets. Dordrecht-Boston: Springer, 1982: 445-470.
- [2] KUZNETSOV S O, OBIEDKOV S A. Comparing performance of algorithms for generating concept lattices [J]. Journal of Experimental & Theoretical Artificial Intelligence, 2002, 14(2): 189-216.
- [3] LI X, SHAO M W, ZHAO X M. Constructing lattice based on irreducible concepts [J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2017, 8(1): 109-122.
- [4] QIAN T, WEI L, QI J J. Constructing three-way concept lattices based on apposition and subposition of formal contexts [J]. Knowledge-Based Systems, 2017, 116: 39-48.
- [5] 张文修, 魏玲, 祁建军. 概念格的属性约简理论与方法 [J]. 中国科学 E 辑: 信息科学, 2005, 35(6): 628-639.

ZHANG W X, WEI L, QI J J. Attribute reduction theory and approach to concept lattice [J]. Science in China Series F-Information Sciences, 2005, 48(6):

713-726.

- [6] QIN K Y, LIN H, JIANG Y T. Local attribute reductions of formal contexts [J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2020, 11(1): 81-93.
- [7] 魏玲, 祁建军, 张文修. 决策形式背景的概念格属性约简 [J]. 中国科学 E 辑: 信息科学, 2008, 38(2): 195-208.
- WEI L, QI J J, ZHANG W X. Attribute reduction theory of concept lattice based on decision formal contexts [J]. Science in China Series F-Information Sciences, 2008, 51(7): 910-923.
- [8] WEI L, LIU L, QI J J, et al. Rules acquisition of formal decision contexts based on three-way concept lattices [J]. Information Sciences, 2020, 516: 529-544.
- [9] REN R S, WEI L. The attribute reductions of three-way concept lattices [J]. Knowledge-Based Systems, 2016, 99: 92-102.
- [10] LI M Z, WANG G Y. Approximate concept construction with three-way decisions and attribute reduction in incomplete contexts [J]. Knowledge-Based Systems, 2016, 91: 165-178.
- [11] 曹丽, 魏玲, 祁建军. 保持二元关系不变的概念约简 [J]. 模式识别与人工智能, 2018, 31(6): 516-524.
- CAO L, WEI L, QI J J. Concept reduction preserving binary relations [J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2018, 31(6): 516-524.
- [12] 魏玲, 曹丽, 祁建军, 等. 形式概念分析中的概念约简与概念特征 [J]. 中国科学: 信息科学, 2020, 50(12): 1817-1833.
- WEI L, CAO L, QI J J, et al. Concept reduction and concept characteristics in formal concept analysis [J]. Scientia Sinica Informationis, 2020, 50(12): 1817-1833.
- [13] 王霞, 彭致华, 李俊余, 等. 一种基于概念可辨识矩阵的概念约简方法 [J]. 计算机科学, 2021, 48(1): 125-130.
- WANG X, PENG Z H, LI J Y, et al. Method of concept reduction based on concept discernibility matrix [J]. Computer Science, 2021, 48(1): 125-130.
- [14] 谢小贤, 李进金, 陈东晓, 等. 基于布尔矩阵的保持二元关系不变的概念约简 [J]. 山东大学学报(理学版), 2020, 55(5): 32-45.
- XIE X X, LI J J, CHEN D X, et al. Concept reduction of preserving binary relations based on Boolean matrix [J]. Journal of Shandong University(Natural

Science), 2020, 55(5): 32-45.

[15] ZHAO S Y, QI J J, LI J A, et al. Concept reduction in formal concept analysis based on representative concept matrix [J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2023, 14(4): 1147-1160.

[16] 马文胜, 侯锡林. 形式概念分析中的同效关系与概念约简 [J]. 计算机科学, 2023, 50(4): 63-76.

MA W S, HOU X L. Same effect relation and concept reduction in formal concept analysis [J]. Computer Science, 2023, 50(4): 63-76.

[17] 智慧来, 李逸楠. 形式概念分析中的面向对象概念约简 [J]. 海南热带海洋学院学报, 2021, 28(5): 66-71.

ZHI H L, LI Y N. Object-oriented concept reduction in formal concept analysis [J]. Journal of Hainan Tropical Ocean University, 2021, 28(5): 66-71.

[18] 李俊余, 李星璇, 王霞, 等. 基于三元因子分析的三元概念约简 [J]. 南京大学学报(自然科学), 2020, 56(4): 480-493.

LI J Y, LI X X, WANG X, et al. Reduction of triadic concepts based on triadic factor analysis [J]. Journal of Nanjing University (Natural Sciences), 2020, 56(4): 480-493.

[19] BURMEISTER P, HOLZER R. On the treatment of incomplete knowledge in formal concept analysis [C]// Conceptual Structures: Logical, Linguistic, and Computational Issues, Proceedings. Berlin: Springer-Verlag, 2000, 1867: 385-398.

[20] LI J H, MEI C L, LYU Y J. Incomplete decision contexts: Approximate concept construction, rule acquisition and knowledge reduction [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2013, 54(1): 149-165.

[21] YAO Y Y. Interval sets and three-way concept analysis in incomplete contexts [J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2017, 8(1): 3-20.

[22] REN R S, WEI L, YAO Y Y. An analysis of three types of partially-known formal concepts [J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2018, 9(11): 1767-1783.

[23] WANG Z, WEI L, QI J J, et al. Attribute reduction of SE-ISI concept lattices for incomplete contexts [J]. Soft Computing, 2020, 24(20): 15143-15158.

(编辑 张 欢)